Aproximaciones al concepto de función: Una mirada a través de los modelos cognitivos de alumnos de preparatoria

Sandra Edith Rolfo

sandra.rolfo@itesm.mx

Elvira G. Rincón Flores

elvira.rincon@itesm.mx

Ángeles Domínguez Cuenca

angeles.dominguez@itesm.mx

Instituto Tecnológico de Monterrey- Campus Monterrey

RESÚMEN

El objetivo de la presente investigación es indagar sobre los modelos cognitivos que tienen alumnos de preparatoria sobre el concepto de función. Paralelamente, este estudio sirvió de plataforma para identificar los conocimientos previos requeridos para abordar dicho concepto. La revisión literaria abarca temas relacionados con dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, el concepto de función (importancia curricular y dificultades en el aprendizaje), y los conocimientos previos necesarios al estudio de función. Se diseñó y aplicó un instrumento de opción múltiple a ciento veintinueve alumnos que cursaban el tercer semestre de preparatoria. Este instrumento permitió conocer los modelos cognitivos de los alumnos respecto al concepto de función, así como sus conocimientos previos. Se identificaron seis categorías diferentes desde el análisis cuantitativo y/o cualitativo. Se pudo concluir que los modelos cognitivos hallados en las diferentes representaciones del concepto de función son variados, por ejemplo se detectaron errores en el concepto mismo de función. También se concluyó que estos modelos están directamente relacionados con los conocimientos previos de los alumnos.

Palabras clave:Función, modelos cognitivos, conocimientos previos, teoría de respuesta de ítem

INTRODUCCIÓN

A lo largo de los años se ha investigado y documentado dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Específicamente, se ha establecido que los alumnos no son capaces de aplicar sus habilidades matemáticas para resolver situaciones del mundo real, esto es, son capaces de operar, pero no de aplicar. En la institución en la que se llevó el estudio, esta situación se evidencia con el alto porcentaje de alumnos capaces de obtener derivadas e integrales de diversas funciones, pero que presentan grandes dificultades para aplicar estos conceptos en la resolución de situaciones problemáticas.

MARCO TEÓRICO

Existen diversos factores que influyen en el aprendizaje de las matemáticas. En cuanto al contenido curricular, Santaló (1994) indica que es fundamental que los planes de estudio tengan en cuenta el valor formativo de las matemáticas. Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes deben participar en la exploración, la conjetura y el pensamiento abstracto (NCTM, 1989). Cordero (2001) señala una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, pues los alumnos pueden saber utilizar fórmulas y definiciones preestablecidas,

pero estas habilidades no garantizan que hayan adquirido el conocimiento matemático. A esto, Gómez-Chacón (1998) agrega que se debe considerar el papel que juegan las emociones en el aprendizaje de las matemáticas.

Existen distintas teorías sobre el desarrollo del aprendizaje. Ausubel (1981) establece que se da el aprendizaje significativo cuando existe una relación sustancial entre la nueva información y la ya presente en la estructura cognoscitiva. Para Vygotsky (1998), las funciones son objetos matemáticos abstractos que se forman a través de la modelación de datos reales. Mientras que Farfán (1992) aborda el desarrollo de las técnicas construidas por los estudiantes como una práctica social; Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez Sierra (2006) establecen el papel que tiene la práctica social en la construcción del conocimiento matemático y cómo se articula en los procesos de representación. Para Castro (2007), la importancia de las matemáticas radica en una forma de aproximación a la realidad. González (2005) señala que la posibilidad de desarrollo científico y tecnológico de un país pasa, entre otros factores, por la cantidad y calidad de sus profesionistas formados en ciencias, ya que tener una buena formación matemática es importante para continuar estudios superiores y para obtener buenas oportunidades laborales.

El aprendizaje del concepto de función requiere de la comprensión de diferentes registros de representación, entre ellos los analíticos y los gráficos. Esto se convierte en una dificultad para el alumno si éste no ha logrado desarrollar esta habilidad en sus cursos anteriores. Sánchez (2003) indica que las matemáticas son jerarquizadas ya que llevan una secuencia de aprendizaje, de modo que si no se dominan las bases, al momento de llegar a niveles más avanzados, no se cuenta con los antecedentes necesarios lo que se convierte en un obstáculo frecuente en el proceso de aprendizaje.

MÉTODO

Para lograr el objetivo de medir las conceptualizaciones de los alumnos sobre el tema de función y sus conocimientos previos relacionados se diseñó un test. Este instrumento se aplicó en una prueba piloto para medir su confiabilidad, validez y objetividad. En la prueba piloto participaron 100 alumnos de cuarto y quinto semestre de la misma institución. Para evitar contaminación, estos alumnos solo participaron en esta prueba piloto. El instrumento constó de 14 preguntas cerradas de opción múltiple. Se observó que cuatro preguntas presentaron índices menores a los esperados, razón por la cuál se modificó el instrumento quedando de diez preguntas cerradas y cuatro abiertas. Se utilizó el enfoque cuantitativo para el análisis de las preguntas cerradas y el cualitativo para las preguntas abiertas. El instrumento resultante se aplicó a 129 alumnos que correspondieron a la totalidad de los que cursaban el tercer semestre de preparatoria, por lo que la muestra corresponde al tipo no probabilístico y el diseño del estudio fue cuasiexperimental.

Específicamente las nociones evaluadas fueron: definición de función, función lineal y función cuadrática. Las categorías que dieron origen a las preguntas cerradas fueron previamente establecidas y las categorías de las preguntas abiertas emergieron al analizar los datos. Las categorías que se determinaron son: Función como relación, Función lineal de la representación numérica a la representación algebraica, Función lineal de la representación gráfica a la representación algebraica, Función lineal del contexto a la expresión algebraica, Función cuadrática a través del análisis gráfico y Función cuadrática del contexto a la expresión algebraica. Se utilizó una matriz de datos para la captura y el procesamiento de los registros obtenidos y su posterior análisis cuantitativo. Se vincularon las variables de la matriz con las del estudio y se realizaron las pruebas de validez y confiabilidad del instrumento de las diez preguntas cerradas, observándose que el instrumento cumplió con los requisitos de Dificultad promedio, Point Biserial y Ferguson’s delta. Posteriormente se realizó el análisis a través de ítem response curve (IRC, por sus siglas en inglés) para cada pregunta cerrada y se graficaron las curvas de respuesta para identificar los posibles modelos cognitivos que presentan los alumnos (Zavala, 2010). Para el análisis cualitativo se confeccionaron tablas de categorías emergentes y se establecieron relaciones entre las variables del estudio. Finalmente, se identificaron los conocimientos previos de los estudiantes a través de su selección de respuestas y se identificaron los tipos de errores señalados por los estudiantes.

RESULTADO Y DISCUSIÓN

Una de las categorías analizadas es Función como relación. Desde el estudio cuantitativo (preguntas cerradas) se abordaron las representaciones en tablas de datos, diagramas de Venn y ejes cartesianos; mientras que desde el análisis cualitativo, se abordaron la representación en ejes cartesianos y la representación algebraica. En la Tabla 1 se concentra el análisis para esta categoría de los datos del test de preguntas cerradas.

Tabla 1

Función como relación. Preguntas cerradas.

Representación	Indicadores	Modelos cognitivos	Porcentaje
Tabla de datos	Distractores leves	Una *x* con dos *y*; Una *x* con muchas *y*	24%
	Fuerte	Cada *x* con una sola *y*	76%
Diagramas de Venn	Fuerte	Reconoce condiciones necesarias para una función.	71%
	Distractores	No reconoce la variable dependiente o las condiciones necesarias de una función.	29%
Ejes cartesianos	No responde	No responde	22%
	Error conceptual	Confunde forma de la gráfica; Relación con los ejes X y Y; Error en la definición de función.	47%
	Concepto expresado correctamente a través del lenguaje verbal	Definición de función; Criterio de la recta vertical; Función cúbica.	31%
Expresión algebraica	No responde	No responde	52%
	Proceso algebraico incorrecto	Sustitución incorrecta; Sustitución correcta pero manejo algebraico incorrecto o error conceptual en la notación de función.	17%
	Proceso algebraico correcto	Sustitución y manejo algebraico correctos.	31%

A través de esta categoría se pudo conocer si los alumnos son capaces de diferenciar relaciones de funciones. Se observó que si bien un alto porcentaje de alumnos reconoció las condiciones que debe cumplir una relación para ser función, muy pocos lograron expresar correctamente la justificación mediante el lenguaje verbal. En todas las representaciones los alumnos presentaron dificultades para comprender y analizar la información presentada; así como en el manejo algebraico y en la interpretación de gráficas de funciones en ejes cartesianos. Se hallaron coincidencias con Guzmán (1998), quien indica que los alumnos presentan dificultades en la comprensión del concepto mismo de función y para expresar claramente por escrito sus conocimientos.

En la categoría Función lineal del contexto a la expresión algebraica se buscó determinar si el alumno es capaz de interpretar una situación problemática y relacionarla con la expresión algebraica de una función lineal (Tabla 2). El problema es el siguiente:

Carlos ha contratado un nuevo plan de teléfono celular por el que paga $200 mensuales de renta. Dicho plan le permite realizar llamadas utilizando hasta 100 minutos de tiempo aire. Una vez consumido dicho tiempo aire le cobrarán $1.15 por cada minuto adicional. Si C representa el costo y x el número de minutos adicionales *¿Cuál es la función que le permite a Carlos calcular el costo mensual por el servicio de telefonía celular?*

A) C(x) = 1.15x-200 **B)** C(x) = 200+1.15x **C)** C(x) = 200-1.15x **D)** C(x) = 200x +1.15

Tabla 2

Función lineal del contexto a la expresión algebraica. Preguntas cerradas

Representación	**Indicadores**	**Modelos cognitivos**	**Porcentaje**
Expresión algebraica	Distractores leves	Confunde depreciación con recargo; Confunde razón de cambio con valor inicial	16%
	Fuerte	Reconoce razón de cambio y valor inicial	84%

Como lo indica la Tabla 2, se encontró que la mayoría de los alumnos logró identificar la razón de cambio constante y el valor inicial, y que solo unos pocos confundieron un valor con el otro. En concordancia con Lupo (2005) se observó que algunos alumnos presentaron confusiones en la interpretación y empleo del lenguaje tanto simbólico como coloquial específico del tema de funciones.

Tabla 3

Función lineal de la representación numérica a la representación algebraica.

Representación	Indicadores	Modelos cognitivos	Porcentaje
Tabla de datos	No responde	No responde	38%
	Error conceptual en la expresión algebraica	Diagramas de Venn como ecuación algebraica; Respuesta numérica como ecuación algebraica	34%
		Incremento de la variable dependiente como razón de cambio constante o como ordenada al origen; Razón de cambio constante como ecuación algebraica	
	Concepto expresado correctamente en lenguaje algebraico.	Expresa correctamente la ecuación algebraica	28%

En cuanto a la transferencia de la representación numérica a la algebraica se incluyeron problemas con tablas. Se observó que un alto porcentaje de los alumnos no respondió porque no se comprendieron los datos de la tabla o porque no sabían como expresar el concepto de función mediante el lenguaje algebraico (Tabla 3). Se detectaron errores conceptuales pues los alumnos no pudieron determinar la función. Se hallaron coincidencias con Cordero (1998), quien señala que el alumno realiza la coordinación de las acciones en diferentes representaciones, entre las que se encuentran las transformaciones visuales, las operaciones numéricas y la manipulación de símbolos algebraicos.

Tabla 4

Función lineal de la representación gráfica a la representación algebraica

Representación	Indicadores	Modelos cognitivos	Porcentaje
Ejes cartesianos	Distractores	Invierte la pendiente. No reconoce pendiente positiva. Confunde pendiente con raíz. Confunde la constante de proporcionalidad con la abscisa del punto dado o con su ordenada.	27%
	Fuertes	Identifica pendiente y raíz. Reconoce la constante de proporcionalidad.	63%

Otra transferencia que se estudió fue de la representación gráfica a la expresión algebraica (Tabla 4). Se observó que un alto porcentaje de alumnos reconoció la constante de proporcionalidad en un problema contextual pero presentó dificultades para reconocer la pendiente y la raíz de una función lineal en ejes cartesianos. Se hallaron coincidencias con Del Puerto, Minnaard y Seminara (2006), quien expresa que los alumnos pueden establecer asociaciones incorrectas entre representaciones gráficas y algebraicas de funciones; y con Guzmán (1998), quien señala que algunos alumnos muestran una ausencia de correspondencia entre la representación gráfica y la algebraica de las funciones.

Tabla 5

Función cuadrática a través del análisis gráfico.

Representación	Indicadores	Modelos cognitivos	Porcentaje
Ejes cartesianos	Distractores	No reconoce concavidad y/u ordenada al origen; Identifica concavidad pero no reconoce ordenada al origen; Reconoce concavidad pero confunde raíces; No reconoce concavidad ni raíces.	35%
	Fuertes	Identifica concavidad y ordenada al origen; Reconoce concavidad y raíces.	65%

En la Tabla 5 se concentran los resultados sobre la capacidad de los alumnos de relacionar la representación gráfica de una función cuadrática con su correspondiente expresión algebraica. Un alto porcentaje de alumnos identificó los conceptos de concavidad y raíces, mientras que algunos alumnos confunden entre sí dichos conceptos. Se hallaron coincidencias con Rodríguez y Zuazua (2002), quienes expresan que se espera que el alumno de bachillerato pueda hacer un esbozo con los aspectos más representativos de una función, pero también se halló que un porcentaje significativo de estudiantes no logró hacerlo.

También se analizó la correspondencia entre los datos de un problema en contexto real y la expresión algebraica de una función cuadrática (Tabla 6). Se observó que un bajo porcentaje de alumnos reconoció la abscisa del vértice y la raíz positiva, mientras que un alto porcentaje de los estudiantes no respondió porque no comprendieron que se solicitaba.

Tabla 6

Función cuadrática del contexto a la expresión algebraica

Representación	Indicadores	Modelos cognitivos	Porcentaje
Problema en contexto real	No responde	No responde	53%
	Error conceptual	Ambas raíces. Altura.	9%
	Error algebraico	Errores algebraicos de diversos tipos.	29%
	Concepto correcto	Raíz positiva.	9%
	Distractores	Confunde abscisa del vértice con ordenada del vértice o con raíz. Error en el cálculo de la abscisa del vértice.	64%
	Posible	Reconoce abscisa del vértice.	36%

Los alumnos presentaron confusiones de abscisa del vértice con raíz, y no pudieron discriminar cual de las raíces obtenidas correspondía a la pregunta del problema. Se hallaron coincidencias con Cantoral y Farfán (2003), pues se detectó que los alumnos presentan un conocimiento carente de significado para ellos, ya que han sido capaces de estudiarlo pero sin haber construido aproximaciones al concepto.

CONCLUSIONES

Dentro de los principales hallazgos se encontraron los siguientes modelos cognitivos correctos: hacer corresponder a cada x una sola y; justificar correctamente mediante el lenguaje verbal; sustituir y operar algebraicamente en forma correcta. Y los siguientes modelos cognitivos erróneos: no reconocer la variable dependiente, la independiente, o las condiciones para que la relación sea función; errores conceptuales de función; confundir la forma de la gráfica; presentar errores de relación con los ejes cartesianos; presentar error conceptual en la expresión algebraica; confundir las características de la función lineal y la función cuadrática.

Los conocimientos previos observados en los alumnos son: reconocer pendiente, raíz y ordenada al origen de una función lineal; reconocer la constante de proporcionalidad; y resolver ecuaciones lineales; mientras que carecen de: comprensión y uso del lenguaje verbal y del algebraico, relación del lenguaje algebraico y gráfico, operaciones aritméticas con números reales, comprensión de los conceptos de relación y función, interpretación de tablas de datos numéricos, resolución de problemas en contextos reales y modelación de funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, los errores más comunes, que impidieron a los alumnos aplicar correctamente el concepto de función son: confusión entre la variable independiente y la dependiente; no reconocer las condiciones de una relación para que sea función; no reconocer los modelos lineales y cuadráticos; dificultad en la comprensión de los problemas que involucran una función cuadrática; dificultad en el uso y la comprensión del lenguaje simbólico así como en la solución de ecuaciones algebraicas sencillas de primer y segundo grado.

Se comprobó que los conocimientos previos de los alumnos fueron una clara delimitación para la realización de este estudio. La falta de interés y el escaso compromiso de algunos estudiantes fueron las limitantes halladas durante la aplicación del instrumento.

Finalmente, se hacen las siguientes recomendaciones:

- Mejorar el instrumento aplicado en esta investigación, con la finalidad de elevar los índices de validez y confiabilidad. Mejorar las preguntas cerradas que resultaron demasiado fáciles para los alumnos.
- Ampliar los alcances de la investigación, por ejemplo: cómo influyen los modelos cognitivos de los alumnos en el aprendizaje de funciones; cuáles son sus motivaciones intrínsecas y extrínsecas de su aprendizaje, y cómo influyen dichas motivaciones y su ansiedad ante el aprendizaje de las Matemáticas.
- Finalmente, se sugiere diseñar y aplicar actividades que involucren un aprendizaje activo, de modo que éste sea significativo para los estudiantes, interrelacionando todas las representaciones de una función: gráfica, algebraica, numérica, en tablas de datos y en problemas contextuales. Dando importancia a la construcción social del aprendizaje matemático así como a los espacios para la autorreflexión de los alumnos.

REFERENCIAS

- Ausubel, P. D. (1981). Psicología Educativa. México, D.F.: Trillas.
- Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., y Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación. Algunos ejemplos [Versión electrónica]. Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, número especial, 83-102.
- Cantoral, R., y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución [Versión electrónica]. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6(1), 27-40.

- Castro de Bustamante, J. (2007). La investigación en educación matemática: una hipótesis de trabajo [Versión electrónica]. Educere, 11(38), 519-531.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el comportamiento tendencial de las funciones [Versión electrónica]. Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, 1(1), 56-74.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana [Versión electrónica]. Revista de investigación en matemática Educativa, 4(2), 103-128.
- Del Puerto, S., Minnaard, C., y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas [Versión electrónica]. Revista Iberoamericana de Educación, 38(4), 1-12.
- Farfán R. (1992). ¿Matemática educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe [Versión electrónica]. Publicaciones Centroamericanas, 6(2), 236-253.
- González, R. M. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes en secundaria [Versión electrónica]. Educación matemática, 17(1), 107-128.
- Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas [Versión electrónica]. Enseñanza de las Ciencias, 16(3), 431-450.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes [Versión electrónica]. Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, 1(1), 5-21.
- Lupo, L. (2005). Dominio de funciones matemáticas en estudiantes de ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello [Versión electrónica]. Revista ORBIS/CienciasHumanas, 1(2), 4-23.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Rodríguez, R.; y Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender matemáticas [Versión electrónica]. Revista de educación, 1(329), 239-256.
- Sánchez, J. (2003). La enseñanza de las matemáticas. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. Madrid, España: Editorial CCS.
- Santaló, L. A. (1994). Matemática para no matemáticos. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Vygotsky, L. S. (1998). Pensamiento y Lenguaje. Madrid, España: Paidós.
- Zavala, G. (2010). Una técnica de análisis para la educación de las ciencias. En S. Márquez, A. A. Gómez, D. M. López, y M. L. Sylveira (Eds.), Investigación e Innovación Educativa en el Estado de Nuevo León (pp. 105-120). Monterrey, México: REDIIEN.